2021年福州一中高中招生测试（“植基”计划，数学类数学子项）

专业测试参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	A	D	A	A	D	D	B	C	C

二、填空题

13. $2\left(\sqrt{3}-1\right)$　　14. $m\geq 1$　　15. -8　　16. $\frac{7}{4}$或$\frac{9}{4}$

三、解答题

17. 【解析】（1）$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right]$

……………………………………………（4分）

因为$a-b=\sqrt{2}-1, b-c=\sqrt{2}+1$，所以$a-c=2\sqrt{2}$，…………………（5分）

原式$=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2\right]=7$．………………………………（7分）

（2）显然x=0不是方程的根，方程两边同除x^2得$x^2-x-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$，

……………………………………………（8分）

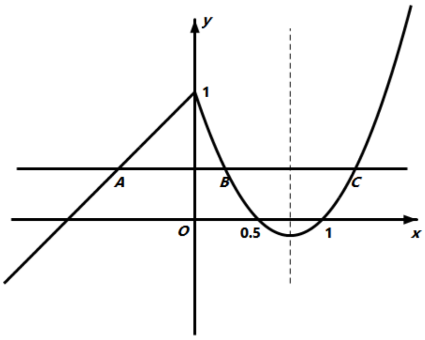
整理得$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$，令$t=x+\frac{1}{x}$，则$t\leq -2$或$t\geq 2$，……（9分）

则$t^2-t-4=0$，解得$t=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$(舍)或$t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，…………………（12分）

所以$x+\frac{1}{x}=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，去分母整理得$x^2-\frac{1+\sqrt{17}}{2}x+1=0$，…………（13分）

所以方程有两个不等实根，这两根的和为$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$．…………………（14分）

18．【解析】（1）



……………………（4 分）

（i）注意到当 $x>0$ 时，函数的图象是一段抛物线：$y=2x^2-3x+1=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$，它的顶点是$\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$．结合图象可知，

当$-\frac{1}{8}<m<1$时，$f(x)=m$恰有三个不等的实数根．…………（6 分）

其中x_1是方程$x+1=m$的根，即$x_1=m-1<0$．

x_2,x_3是方程$2x^2-3x+1=m$，即$2x^2-3x+1-m=0$的两个不等实根．由韦达定理知$x_2+x_3=\frac{3}{2}$，故$x_1+x_2+x_3=m-1+\frac{3}{2}=m+\frac{1}{2}$．

又$-\frac{1}{8}<m<1$，故$\frac{3}{8}<x_1+x_2+x_3<\frac{3}{2}$．……………………………（8 分）

（ii）证明：由（i）知$x_1=m-1$，$x_2=\frac{3-\sqrt{8m+1}}{4}$…………………（10 分）

所以$x_1+x_2=m-1+\frac{3-\sqrt{8m+1}}{4}=\frac{4m-1-\sqrt{8m+1}}{4}$，其中$-\frac{1}{8}<m<1$．

………………………………（11 分）

当$-\frac{1}{8}<m\le\frac{1}{4}$时，$x_1+x_2<0$显然成立；…………………………（12 分）

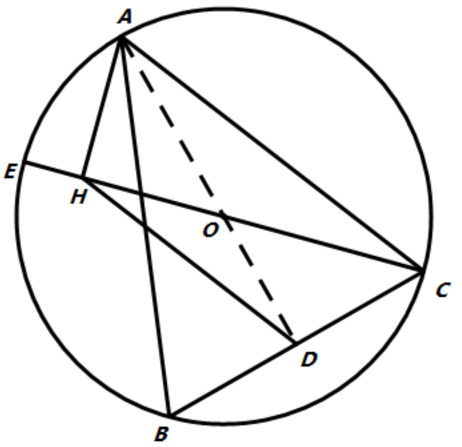
当$\frac{1}{4}<m<1$时，

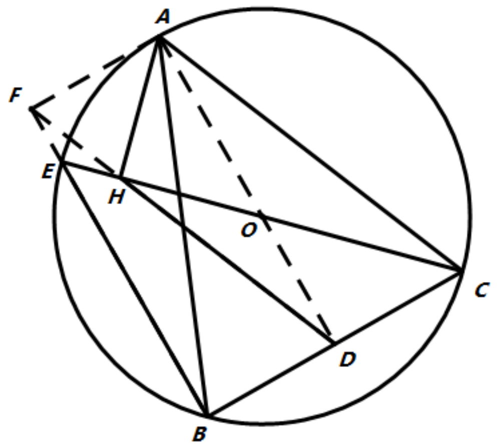
$$x_1+x_2=\frac{4m-1-\sqrt{8m+1}}{4}=\frac{16m^2-16m}{4\left(4m-1+\sqrt{8m+1}\right)}=\frac{m(m-1)}{4m-1+\sqrt{8m+1}}<0$$

…………………………（13 分）

综上，$x_1+x_2<0$．……………………………………………………（14 分）

19．【解析】





【解析】（1）连接 AO 交 CE 于 O，设 O 为 DABC 的外接圆圆心．

Q $AB=$ AC， D 为 BC 的中点

\ AD^ BC．于是点 O 在 AD 上．……………………………………………………（1 分）

Q AH^ CE 于 H \ ? AHC ? ADC 90?，

\ A, H, D, C 四点共圆．…………………………………………………………………（3 分）

\ ? ADH ? ACH ? ACO ? OAC，………………………………………………（5 分）

\ DH // AC．…………………………………………………………………………………（6 分）

（2）作 e O 在点 A 处的切线，与 BE 的延长线相交于点 F． 只需证明 D, H, F 三点共线．

Q AF 与 e O 相切 \ AF^ AO，即 ? FAD 90?． ………………………（7 分）

又 Q CE 是 e O 的直径 \ ? FBD ? EBC 90?．……………………………（8 分）

结合 ? ADB 90? 知四边形 $ADBF$ 是矩形．………………………………………（9 分）

由矩形的性质以及 A, C, B, E 四点共圆、A, C, D, H 四点共圆得

? ADF ? ABF ? ABE ? ACE ? ADH，………………（12 分）

故 D, H, F 三点共线．因此结论成立． ……………………………………………（14 分）

20.【解析】（1）可以将$1,2,\cdots,13$分成如下五组：

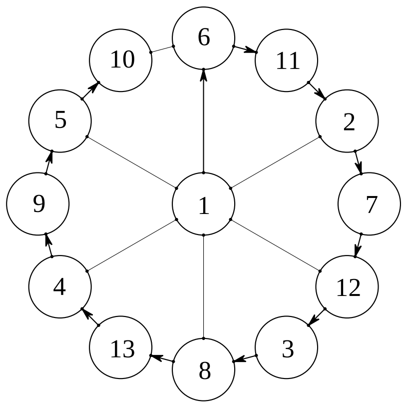
$$\{1,6,11\},\{2,7,12\},\{3,8,13\},\{4,9\},\{5,10\},$$

其中任意差为5的两数均在同一组．…………………………………………（3 分）

只需画出图中13个圈的一条一笔画路径，再将上述13个数按路径依次填入即可．

如图是一种满足条件的填法（填法不唯一）．…………………………………（6 分）

（注：只需给出满足条件的填法即可）



（2）由（1）及抽屉原理知，圈A,B,C,D,E,F内所填写的数中必有两数在同一组内，它们的差是5的倍数．………………………………………………（8 分）

不妨设这两个数是x,y（$x<y$），则$y-x$是5的倍数．又$1\le y-x\le 12$，因此$y-x=5$或$y-x=10$．…………………………（10 分）

又圈A,B,C,D,E,F两两不相邻，故这些圈中所填的数两两之差不是5，因此$y-x\ne 5$．……………………………………………………………（12 分）

于是$y-x=10$．命题证毕．………………………………………………（14 分）

21.【解析】（1）若正整数n满足条件，则

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=2021,$$ ……………………………………（2 分）

即$n^2+n-4042=0$.

因为$\Delta=1^2-4\times1\times(-4042)=16169$，

所以$127^2<\Delta<128^2$，…………………………………………………………（4 分）

故Δ不是完全平方数，原方程无整数根，这与n是正整数矛盾.

故不存在满足条件的n. ……………………………………………………（6 分）

（2）取$n=2021$时，有

$$1+2+\cdots+2021=\frac{2021\times2022}{2}=2021\times1011$$

是2021的整数倍．故满足题意的n存在．………………………………（7 分）

设$2021\left|1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right.$，结合$(2021,2)=1$可知$2021\mid n(n+1)$．注意到

$2021=43\times47$且$(n,n+1)=1$，故有以下四种情况.

情况一：若$2021\mid n$，

则$n=2021k$，其中k是任意正整数；……………………………………（8 分）

情况二：若$2021\mid n+1$，

则$n=2021k-1$，其中k是任意正整数；…………………………………（9 分）

情况三：若$43\mid n$，$47\mid n+1$，

设$n=47m-1$，其中m是正整数．则

$$43\mid 47m-1\Leftrightarrow 47m\equiv1\pmod{43}\Leftrightarrow 4m\equiv1+43\pmod{43}\Leftrightarrow m\equiv11\pmod{43}.$$

因此$m=43k+11$，其中k是非负整数．于是

$n=47m-1=47(43k+11)-1=2021k+516$；……………………………（11 分）

情况四：若$47\mid n$，$43\mid n+1$，

设$n=47m$，其中m是正整数．则

$$43\mid 47m+1\Leftrightarrow 47m\equiv-1\pmod{43}\Leftrightarrow 4m\equiv-1+3\times43\pmod{43}\Leftrightarrow m\equiv32\pmod{43}.$$

因此$m=43k+32$,其中k是非负整数．于是

$n=47m=47(43k+32)=2021k+1504$．………………………………（13 分）

综上所述，满足（2）的所有正整数n是$2021k,2021k-1$（k为任意正整数）与$2021k+516,2021k+1504$（k为任意非负整数）．……………（14 分）