

2021 年福州一中高中招生测试 (“植基”计划, 数学类数学子项)

专业测试

(测试时间 6 月 28 日上午 8:30 — 10:30 满分 150 分)

学校_____ 姓名_____ 准考证号_____

注意: 请将选择题、填空题、解答题的答案填写在答题卡上的相应位置.

一. 选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的.)

1. 在班班有歌声比赛中, 10 位评委给某班打分, 得到互不相等的 10 个分数. 去掉一个最高分后, 平均分为 x ; 去掉一个最低分后, 平均分为 y ; 同时去掉一个最高分和一个最低分后, 平均分为 z , 则()

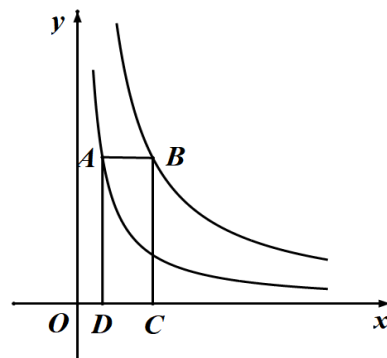
- A. $x > z > y$ B. $y > z > x$ C. $y > x > z$ D. $z > y > x$

2. 方程 $2\sqrt{x-3} + x - 6 = 0$ 的实数解为()

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 4 或 12

3. 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上, 点 B 在双曲线 $y = \frac{12}{x}$ 上, $AB \parallel x$ 轴, 且点 C 、 D 在 x 轴上. 若四边形 $ABCD$ 为矩形, 则它的面积为()

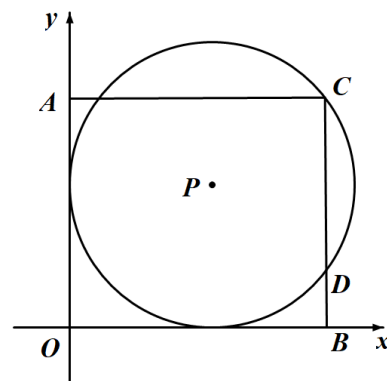
- A. 4 B. 6
C. 8 D. 12



第 3 题图

4. 如图, 在平面直角坐标系中, eP 在第一象限, 且与 x 轴、 y 轴都相切, 并经过矩形 $AOBC$ 的顶点 C , D 为 BC 与 eP 的另一个交点. 若 eP 的半径为 5, 点 A 的坐标是 $(0, 8)$. 则点 D 的坐标是()

- A. $(9, 2)$ B. $(10, 2)$
C. $(9, 3)$ D. $(10, 3)$



第 4 题图

5. 若实数 x, y, z 满足 $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{y+x}$, 则 $\frac{x}{y+z} =$ ()

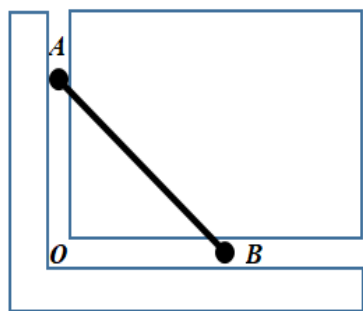
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ 或 1 D. $\frac{1}{2}$ 或 -1

6. 已知二次函数 $y = ax^2 (a > 0)$ 的图象上 A, B 两点的横坐标分别为 $-1, 3$, O 是坐标原点. 若 $\triangle AOB$ 是直角三角形, 则 $\tan \angle ABO =$ ()

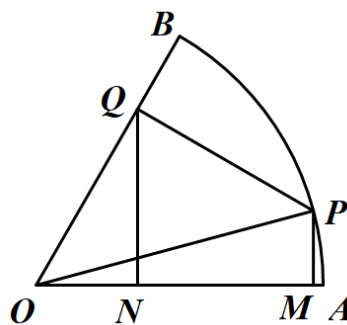
- A. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}$

7. 如图, 两个滑块 A, B 由一个连杆连接, 在两条互相垂直的滑道 (宽度可以忽略) 上滑动. 开始时, 滑块 A 距 O 点 20cm , 滑块 B 距 O 点 20cm . 当滑块 A 向下滑到 O 点时, 连杆中点运动的路程为 ()

- A. $\frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$ B. $10\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ C. 20 D. $5\sqrt{2}\pi$



第 7 题图



第 8 题图

8. 如图, 半径为 1 的扇形 OAB 的圆心角为 60° , $\overset{\frown}{AB}$ 上的点 P 满足 $\angle POA = 15^\circ$.

若 $PQ \perp OB$ 于 Q , $PM \perp OA$ 于 M , $QN \perp OA$ 于 N , 则 $MN =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

9. 若四个互不相等的正实数 a, b, c, d 满足 $(a^{2021} - c^{2021})(a^{2021} - d^{2021}) = 2021$,

$(b^{2021} - c^{2021})(b^{2021} - d^{2021}) = 2021$, 则 $(ab)^{2021} - (cd)^{2021}$ 的值为 ()

- A. 2020 B. -2020 C. 2021 D. -2021

10. 已知跳蚤每次跳动都从等边三角形的一个顶点等可能地跳到另外两个顶点中的一个, 则跳动 5 次后恰好回到起点的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{16}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{8}$

11. 若点 P 在等腰直角 $\triangle ABC$ 所在的平面内, 且满足 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 都是等腰三角形, 则符合条件的点 P 有 ()

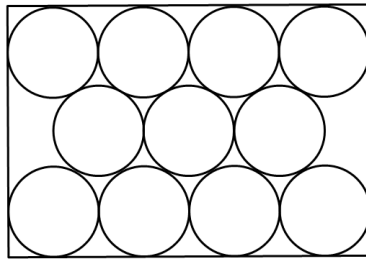
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

12. 已知 n 为正整数. 若 $91^n \mid 2021 \times 2020 \times L \times 3 \times 2 \times 1$, 则 n 的最大值为 ()

- A. 1 B. 23 C. 166 D. 344

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 如图, 11 个等圆分三层放置在一个矩形内部, 相邻两圆相互外切, 且一、三层的圆与矩形的边相切, 则矩形长宽比 $q (q > 1) =$ _____.



第 13 题图

14. 若对于任意的实数 k , 函数 $y = kx + k$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{x} + m$ 的图象恒有交点, 则实数 m 的取值范围为_____.

15. 若 $a = \sqrt{2} - 1$, 则 $\frac{a^6 + 5a^2 + 6}{2a^3 - 1} =$ _____.

16. 符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 若 $2x - [x] = \frac{5}{2}$, 则 $x =$ _____.

三. 解答题 (本大题共 5 小题, 每小题 14 分, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (1) 已知 $a - b = \sqrt{2} - 1$, $b - c = \sqrt{2} + 1$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值;

(2) 求方程 $x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ 的所有实数根的和.

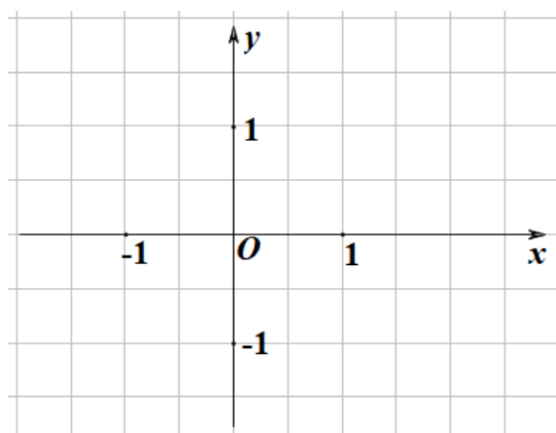
18. 已知函数 $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2x^2 - 3x + 1, & x > 0. \end{cases}$

(1) 在下列坐标系中，作出函数的图象 C ；

(2) 若直线 $y = m$ 与函数图象 C 有三个不同的交点，交点的横坐标从小到大依次为 x_1, x_2, x_3 .

(i) 求 $x_1 + x_2 + x_3$ 的取值范围；

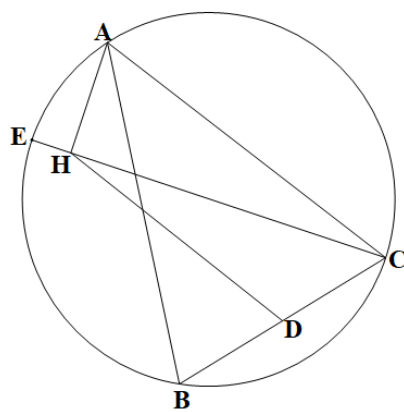
(ii) 证明： $x_1 + x_2 < 0$.



19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 边的中点， CE 为其外接圆的直径，作 $AH \perp CE$ 于点 H 。

(1) 证明： $DH \parallel AC$ ；

(2) 记 l 为 $\triangle ABC$ 外接圆在点 A 处的切线，证明： BE, DH, l 三线共点。



第 19 题图

20. 已知图1是一个由13个圈与若干直线段构成的图形. 若两个圈之间被一条线段直接连接, 则称这两个圈相邻. 现将1, 2, 3, L, 13, 不重复、不遗漏地填入圈中, 每个圈内只填一个数.

(1) 请给出一种填法, 满足任意差为5的两个数均填在相邻的圈中;

(2) 证明: 在满足(1)所给条件的任意填法中, 圈A, B, C, D, E, F (图2)中所填的数中必有两数的差为10.

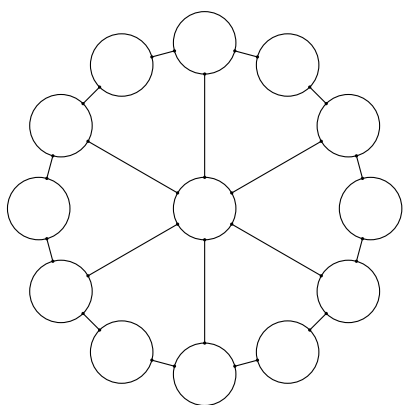


图1

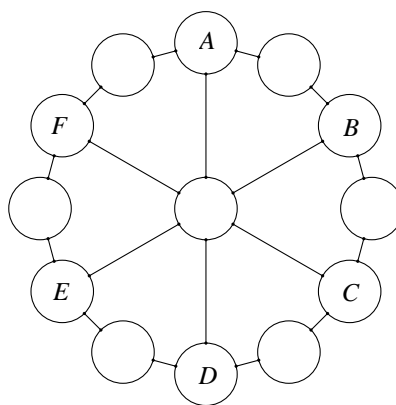


图2

第 20 题图

21. (1) 是否存在正整数 n , 使得 $1+ 2+ L + n = 2021$? 若存在, 求出正整数 n 的值; 若不存在, 请说明理由;

(2) 是否存在正整数 n , 使得 $1+ 2+ L + n$ 是 2021 的整数倍? 若存在, 求出所有符合条件的正整数 n ; 若不存在, 请说明理由.